EXERCICES DE TRIGONOMETRIE

Exercice 1

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-après :

a. $f(x) = 3x\cos x + 2\cos\dfrac{\pi}{5}$; **b.** $f(x) = (\sin x)^2$.

Exercice 2 : Connaître certaines propriétés

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \cos x$.

a. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Ni l'une ni l'autre ?

b. Démontrer que f est périodique de période π.

Exercice 3 : Etudier les variations d'une fonction

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = -3\cos x - 5$.

   a. Comparer $f(a)$ et $f(b)$ lorsque $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; en déduire les variations de f sur I.

   b. Pouvait-on le prévoir directement à partir des variations de la fonction cosinus ?

2. Résolvez dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et représentez l'ensemble des solutions sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Exercice 4 : Résoudre une équation ou une inéquation

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 = 0$.

2. Résolvez dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et représentez l'ensemble des solutions sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Exercice 5

1. En vous aidant éventuellement d'un outil de calcul formel, conjecturez l'expression de $f^{(n)}(x)$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième (ou d'ordre n) de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$. **b)** $f(x) = \cos^2(x)$.

2. Démontrez par récurrence ces conjectures.

Vous pouvez vérifier avec le module tableur de GeoGebra.

Tableur

	A	B	C
1	cos(x) + sin(x)		
2	=A1'(x)		
3			
4			

Copie vers le bas

Exercice 6

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

et $$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}.$$

1. Prouvez que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. a) Prouvez que chacune des fonctions :

$$f : x \longmapsto x - \sin(x),$$

$$g : x \longmapsto \cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1,$$

$$\text{et } h : x \longmapsto \sin(x) + \frac{x^3}{6} - x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) Justifiez que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \leqslant n^4.$$

Déduisez du **a)** que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

c) Prouvez que la suite (u_n) est convergente et calculez sa limite.